題目卷共 3 張單面

交卷時請全部繳回

臺北市立明倫高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選

【數學科】初選試題卷

考生姓名：_______________

一、 填充題（每格 5 分，共 70 分，請寫在答案卷上，答案須化為最簡分數或最簡根式）

1. 請以牛頓法取初始值 $a_1 = 0$ ，求方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $0 < x < 1$ 範圍的實根之第三個近似值 $a_3 =$ __(A)__ 。

2. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $\frac{1}{i^{2025}} - \frac{2}{i^{2024}} + \frac{3}{i^{2023}} - \frac{4}{i^{2022}} + \cdots - \frac{2024}{i^2} + \frac{2025}{i} = a + bi$ ，其中 a,b 為實數，則 $a - b =$ __(B)__ 。

3. 創創自稱射擊之命中率為 0.6。某日創創表演射擊，直到第 n 次時才首次命中靶面並停止，設隨機變數 X 的取值表示創創首次命中靶面之射擊次數，現在以顯著水準 $\alpha = 0.01$，對命中率 0.6 進行假設檢定，求「不拒絕」創創自稱射擊命中率為 0.6 的最大 n 值為 __(C)__ 。

4. 已知區域 R 滿足 $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \le 4 \\ y \ge 2 \end{cases}$，將區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 __(D)__ (請以符號 π 表示答案)。

5. 守守將 10 元存入一家銀行推出的高頻複利定存方案，該方案的年利率為 50%，並且每年分成 n 次計息。當計息次數 n 趨近無限大時，守守的這筆投資在一年後將趨近於某個金額 S 。已知 $e \approx 2.71828$，請求出 S 的整數部分為 __(E)__ (請用正整數表示)。

6. 將橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 在坐標平面上，以原點O為中心逆時針旋轉$30°$得到橢圓Γ'，試求Γ'上任意一點$P(x,y)$到直線$L:x-\sqrt{3}y=1$的距離最大值為__(F)__。

7. 一個戶外露營活動需要搭建一個特殊形狀的立體帳篷。將帳篷的底座平放在 xy 平面上，為圓形區域 $x^2+y^2\leq 9$。已知帳篷內部每個垂直於 x 軸的截面，都是一個等腰直角三角形，且該三角形的斜邊恰好是底座圓上與 x 軸垂直的弦。試利用切片法，求出帳篷的內部體積為__(G)__。

8. 已知空間中三向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所張的平行六面體體積為 60。若點D滿足 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ ，其中 $x>0,\ y>0,\ z>0$，且四面體 $OABD$、$OACD$、$OBCD$ 的體積依序為 $12,15,18$ ，求$(x,y,z)=$__(H)__。

9. 設函數 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ，且當$x>0$時，恆有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}\left(f\left(\frac{x^2}{n}\right)+f\left(\frac{2x^2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{nx^2}{n}\right)\right)=\frac{\sqrt[3]{7+x}}{x}$ ，求 $f(1)=$__(I)__。

10. 擲一顆公正骰子 6 次，令出現的點數依序為隨機變數X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6，試求$X_1-X_2+X_3-X_4+X_5-X_6=10$的機率為__(J)__。

11. 設空間中三個向量如下：$\overrightarrow{a}=(2,1,k)$，$\overrightarrow{b}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{c}=(-2,2,1)$。若已知對於所有實數$t,s$，$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+s\overrightarrow{c}\right|$ 的最小值為5，求所有滿足條件的實數k值之總和為__(K)__。

12. 已知銳角三角形 ABC 中，滿足 $\sin(A)=\sin(B)\cdot\sin(C)$ ，求 $\tan(A)\cdot\tan(B)\cdot\tan(C)$ 的最小值為__(L)__。

13. 已知連乘符號的定義為$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$。在坐標平面的單位圓上，有一個正五邊形，其頂點依逆時針方向分別為A_0, A_1, A_2, A_3, A_4，設 $P=\prod_{j=0}^{4}\prod_{k=j+1}^{4}\overline{A_jA_k}$ ，其中$\overline{A_jA_k}$為頂點A_j與A_k的距離。若P的整數部分為a位數，且P的最高位數字為b，求數對$(a,b)=$__(M)__。(已知 $\log 2\approx 0.3010$ ， $\log 3\approx 0.4771$ ， $\log 7\approx 0.8451$)

14. 黛西在計算函數乘積的導函數時，誤將微分的乘法法則寫成 $(f\cdot g)'=f'\cdot g'$ ，而非正確的 $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ ，然而，她算出的導函數結果卻恰好與正確的導函數相符。已知 $f(x)=x^2$，且函數 g 在包含 $x=3$ 與 $x=4$ 的某個開區間內可微，並且滿足 $g(3)=1$ ，請求出 $g(4)$ 的值為__(N)__。

二、 計算與證明題（共 30 分，請將詳細解題過程寫在答案卷上，不完整者酌予計分；請使用黑色或藍色原子筆作答。）

1. 設隨機變數X的機率分布符合幾何分布，即$X\sim G(p)$，其中 $0<p<1$，則

(1) 證明X的期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ (8 分)

(2) 某手機遊戲舉辦限時抽卡活動，每次抽卡可隨機獲得一名稀有角色，共有 4 名不同角色，抽到每名角色的機率均為 $\dfrac{1}{4}$。若玩家想要收集全部 4 名不同的角色，預期需要抽卡的次數之期望值為多少？ (7 分)

2. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足遞迴式 $\begin{cases} a_1=0 \\ a_{n+1}=\dfrac{10}{13}a_n+\dfrac{24}{13}\sqrt{4^n-(a_n)^2},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ ，試回答以下小題：

(1) 請求出a_2, a_3的值為何？ (6 分)

(2) 請找出a_n的一般項公式並證明。 (9 分)

【試題結束，祝考試順利】